KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

RASPODJELE DISKRETNIH PROMJENLJIVIH

1. Binomna raspodjela
2. Puasonova raspodjela

V5

Zadatak 1.

U proizvodnji prefabrikovanih betonskih ivičnjaka nalazi se 6 % neispravnih.

a) Ako ispitujemo uzorak od 5 proizvoda, kolika je vjerovatnoća da se među njima nađu tri neispravna proizvoda?

b) Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?

c)Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,01?

RJEŠENJE

X- slučajna promjenljiva= broj neispravnih proizvoda u uzorku od 5; Xϵ={0,1,2,3,4,5}

n- broj elemenata =5

p=6%=0,06

X~B(5;0,06),

a) kolika je vjerovatnoća da se među 5 proizvoda iz uzorka nađu tri neispravna proizvoda

$$\boldsymbol{p(3) = P(X=3) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{5}{3} \cdot 0,06^3 \cdot 0,94^{5-3} = 0,002}$$

Mogli smo sračunati preko rekurentne formule:

$$p(x) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x-1)$$

$$\boldsymbol{p(0)} = P(X=0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{5}{0} \cdot 0,06^0 \cdot 0,94^5 = 0,94^5 = 0,734$$

$$\boldsymbol{p(1)} = \frac{5-1+1}{1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(0) = \frac{5}{1} \cdot \frac{0,06}{0,94} \cdot 0,734 = 0,234$$

$$\boldsymbol{p(2)} = \frac{5-2+1}{2} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(1) = \frac{4}{2} \cdot \frac{0,06}{0,94} \cdot 0,234 = 0,030$$

$$\boldsymbol{p(3)} = \frac{5-3+1}{3} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(2) = \frac{3}{3} \cdot \frac{0,06}{0,94} \cdot \boldsymbol{0,030} = 0,002$$

Zadatak 1. - nastavak

U proizvodnji prefabrikovanih betonskih ivičnjaka nalazi se 6 % neispravnih.

a) Ako ispitujemo uzorak od 5 proizvoda, kolika je vjerovatnoća da se među njima nađu tri neispravna proizvoda?

b**) Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?**

c**)Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,1?**

RJEŠENJE

b) Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}06 = 0{,}312$$

b)Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,1?

Treba odrediti ***n***, tako da ***p(X≥1)≥0,01***

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) \geq 0{,}1$$

$$\boldsymbol{p(0)} = P(X = 0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{x-1} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n$$

$$1 - q^n \geq 0{,}1$$

$$0{,}94^n \leq 1 - 0{,}1$$

$$\log 0{,}94^n \leq \log 0{,}90$$

$$n \cdot \log 0{,}94 \leq \log 0{,}90 \Rightarrow n \geq \frac{\log 0{,}90}{\log 0{,}94} \geq 1{,}703$$

Zadatak 2

Uzorci od po 8 proizvoda formirani su na slučajan način iz velike partije u kojoj je 20% neispravnih proizvoda. Naći: a) očekivani broj neispravnih proizvoda u svakom od uzoraka b) vjerovatnoću da se u uzorku pojavi **manje** od očekivanog broja škartova; c) za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše dva neispravna proizvoda

RJEŠENJE

X- slučajna promjenljiva= broj neispravnih proizvoda u uzorku od 8; X∈={0,1,2,3,4,5,6,7,8}

n- broj elemenata =8

p=20%=0,2

X~B(8;0,2),

a) očekivani broj neispravnih proizvoda u uzorku od 8?

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$$

b) naći vjerovatnoću da se u uzorku pojavi manje od očekivanog broja neispravnih proizvoda

(manje od onog koliko je sračunato pod a))

Treba odrediti ***p(X<1,6)=p(X=0)+p(X=1)***

$$p(x) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x-1)$$

$$\boldsymbol{p(0)} = P(X=0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = q^8 = 0{,}8^8 = 0{,}1678$$

$$\boldsymbol{p(1)} = \frac{8-1+1}{1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(0) = \frac{8}{1} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}8} \cdot 0{,}1678 = 0{,}3355$$

$$\boldsymbol{p(X<1{,}6)} = p(X=0) + p(X=1) = 0{,}1678 + 0{,}3355 = 0{,}50334$$

Zadatak 2- nastavak

Uzorci od po 8 proizvoda formirani su na slučajan način iz velike partije u kojoj je 20% neispravnih proizvoda. Naći: a) očekivani broj neispravnih proizvoda u svakom od uzoraka b) vjerovatnoću da se u uzorku pojavi **manje** od očekivanog broja škartova; c**) za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše dva neispravna proizvoda**

RJEŠENJE

c) **za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše 2 neispravna proizvoda=** treba naći vjerovatnoću da se u jednom uzorku nađu najviše 2 proizvoda, pa tu vjerovatnoću pomnožiti sa 100 uzoraka, tj.:

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2),$$

u prethodnom dijelu zadatka sracunato p(0) i p(1)

$$\boldsymbol{p(2)} = \frac{8-2+1}{2} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(1) = \frac{7}{2} \cdot \frac{0,2}{0,8} \cdot 0,3355 = 0,2936$$

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,1678 + 0,3355 + 0,2936 = 0,7969$$

Ukupno se u 0,7969∗100=79,69≈80 uzoraka očekuje pojava najviše 2 neispravna proizvoda

Zadatak 3
Složeni mehanizam sastoji se od 2000 podjednako pouzdanih elemenata. Vjerovatnoća zastoja za svaki dio iznosi 0,0005. a) Koliko se može očekivati elemenata koji su otkazali? b)Naći vjerovatnoću da mehanizam otkaže u radu, ako zastoj mehanizma nastane kada otkaže bar jedan element.

RJEŠENJE

X- slučajna promjenljiva= broj elemenata koji su otkazali od 2000; X∊={0,1,2,3...2000}

n- broj elemenata =2000 vjerovatnoća otkaza 1 elementa : p=0,0005 ***n→∞*** i ***p→0***

X~Po(λ), λ=n·p=2000*0,0005=1

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

a) očekivani broj elemenata koji su otkazali

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = \lambda = 1$$

b) naći vjerovatnoću da mehanizam otkaže u radu, ako zastoj mehanizma nastane kada otkaže bar jedan element

Treba odrediti ***p(X≥1)***

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$$

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-1}}{1} = \frac{1}{e} = 1/2{,}7183{=}0{,}368$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}368 = 0{,}632$$

Zadatak 4
Partija proizvoda sadrži 5% škartova. Uzima se slučajan uzorak od n=60 proizvoda. Izračunati vjerovatnoću da se u uzorku ne nadje ni jedan škart.

RJEŠENJE

X- slučajna promjenljiva= broj škartova u uzorku od 60; $X\epsilon=\{0,1,2,3...60\}$

n- broj elemenata =60 vjerovatnoća škarta u partiji 5% ***n→∞*** i ***p→0***

praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1

$X \sim Po(\lambda)$, $\lambda = n \cdot p = 60*0,05 = 3$

pretpostavljamo da se radi o Puasonovoj raspodjeli:

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Vjerovatnoća da se u uzorku ne nadje ni jedan škart je p(X=0)

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-3}}{1} = \frac{1}{e^3} = 0,04979$$

Zadatak 5
Proizvodi jedne velike serije, koja sadrži 0,7% škarta, pakuju se u kutije od 100 komada. a) Koliki će procenat kutija biti bez ijednog škarata; b) koliki će procenat kutija biti sa dva ili više škartova?.

RJEŠENJE

X- slučajna promjenljiva= broj škartova u uzorku od 100; X∈={0,1,2,3...100}

n- broj elemenata =100 vjerovatnoća škarta u partiji 0,7% $n \to \infty$ i $p \to 0$

praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1

X~Po(λ), λ=n·p=100*0,007=0,7

pretpostavljamo da se radi o Puasonovoj raspodjeli: $$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

a) **Vjerovatnoća da se u uzorku ne nadje ni jedan škart je p(X=0)**

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-0,7}}{1} = \frac{1}{e^{0,7}} = 0,49659$$

– **% kutija bez škarta:** $P_\lambda(0) \cdot 100\% = 49,65\%$

b) **Vjerovatnoća da se u uzorku nadju 2 ili više škartova je p(X≥2)**

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$

$P_\lambda(1) = \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} = \frac{0,7 \cdot e^{-0,7}}{1} = \frac{0,7}{e^{0,7}} = 0,3476$, ili se može koristiti rekurentni obrazac: $P_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot P_\lambda(x-1)$, pa je za X=1, P(x=1)=λ/1*P(X=0)

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,49659 - 0,3476 = 0,1558$$

– **% kutija sa 2 ili više škarta:** $P_\lambda(X \geq 2) \cdot 100\% = 15,58\%$